

「図形と組み合わせ」

1 白と黒に分ける

碁石やオセロのコマのようなものを使って、いくつかの問題を考えます。

白のコマと黒のコマを混ぜて一列に並べたものに対して、隣り合った2つを交換して、白のまとまりと黒のまとまりに揃えて分けることを考えてみましょう。

例えば ●○○●● は

●○○●● → ●○●●● → ●●●●○ → ○●●●●

というように、3ステップで白と黒に分けることができた。

なるべく少ないステップで白と黒に分けることを考える。ただし、揃え終わったとき、白のまとまりが左側に来て、右側に来てよいとする。

ゲーム A

1. 2人ずつの組になり、もっとも揃えにくいように白と黒のコマ合計6つを並べてみよう。
2. そのあと、相手は示されたようにコマを並べ、それからなるべく少ないステップで揃えてみよう。かかったステップ数を記録しておく。
3. 上で揃えた白と黒の並びが左右逆になるように揃えることを考える。それには何ステップかかったか記録しておこう。
4. 今度は、コマ10個で同じことをやってみよう。

2 白と黒をひっくり返す

白のコマと黒のコマが混ざって一列に並んだオセロのコマを考える。黒のコマが1つ以上あるとする。

このうちで好きな黒のコマを選び、それに接する両側のコマを裏返し、白と黒を逆にすることを考える。選んだコマはひっくり返さないものとする。端の黒のコマを選んだ場合は、接する1つのコマのみを裏返す。この操作の繰り返しを考える。たとえば

↓ ●○○○ → ●○○○ ●●↓○○ → ●●○○○ → ○●○○○

黒のコマが1つだけになったことに注意しよう。

このように黒のコマ1つにすることが、いつでもできるであろうか？

試行。

- ・ 並んだ3つのコマの2つ以上が黒の時、上の操作を高々2回行くと、黒が1つになる。
- ・ 並んだ4つのコマの2つ以上が黒の時、上の操作を高々3回行くと、黒が1つにできることを確かめよ。最後の黒のコマの位置を覚えておこう。

ゲーム B

- 2人ずつの組になり，上の操作が難しいように白と黒のコマ合計5つを並べてみよう．
- 相手が示したものから，黒が1つになるように，しかもなるべく少ない回数の操作を試してみよう．最後の黒の位置を覚えておく．
- コマ9個の場合，最も操作の手数がかかるのは？

結果. 実は，ゲーム A とゲーム B は同等である．

$$\begin{array}{l} A: \textcircled{\bullet} \bullet \bullet \bullet \bullet \rightarrow \textcircled{\bullet} \bullet \bullet \bullet \bullet \rightarrow \circ \circ \bullet \bullet \bullet \bullet \\ B: \bullet \circ \bullet \bullet \circ \rightarrow \bullet \bullet \bullet \circ \circ \rightarrow \circ \bullet \circ \circ \circ \end{array}$$

3 数字の並べ替え

0 から 9 までの数字を書いたコマ 9 個が横にでたらめに並んでいるとき，その隣同士を交換して，左から順に 012... と並べ替えたい．何回の交換で出来るかを知るにはどうしたらよいか，考えてみよう．

0,1,2,3,4 のコマとき： $\begin{array}{cccccc} & & \frown & & \frown & \\ & & \text{---} & & \text{---} & \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 & \end{array}$ 転倒数：6

4 コマの並びに数字を入れる

どのコマもいずれかのコマと接するように 2 つ以上のコマを並べる．

分かりやすいように，接するコマ同士を線でつないでコマは離して描くことにする．各コマに 1 以上の自然数を書き，各コマの数字が，そのコマ接するコマに書かれた数字の和の半分になるようにする．

このようなことが出来るコマの並べ方を分類しよう．

$$\tilde{A}_2: \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \quad \tilde{D}_4: \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \quad \tilde{E}_7: \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \quad \tilde{A}_*, \tilde{D}_*, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$$

5 コマをいくつかのグループに分ける

5 個のコマをいくつかのグループに分割することを考える (分割しない場合も含める)．

- 分割が 1 つ，すなわち 5 個のままだが 1 通り
- 2 つに分割するのは，4 個と 1 個に，3 個と 2 個に，というように 2 通りある
- 3 つに分割するのは，3 個と 1 個と 1 個に，2 個と 2 個と 1 個に，の 2 通りある
- 4 つに分割するのは，2 個と 1 個が 3 組のみの 1 通り
- 5 つに分割するのは，1 通り

全部で 7 通りの分割がある (分割数という)

そのなかで，3 組以下に分割するのは 5 通り

3 個以下のコマからなる組に分割するのはやはり 5 通り

試行. 6 個のコマではどうなるか考えてみよう．

100 個のものを 10 組以下に分けるのが何通りあるかと，10 個以下のコマからなる組に分けるのが何通りあるかは同じである．

100 と 10 とは別の数に変えても上は正しい．

8 個のコマの時： $\begin{array}{ccc} \circ \circ \circ \circ \\ \circ \circ \\ \circ \circ \end{array} \quad 8 = 4 + 2 + 2 = 3 + 3 + 1 + 1$