高校生のための現代数学講座　東京大学
「複素数」　玉原国際セミナーハウス
講義 (4)　松尾　厚　2018 年 7 月 21 日

「初等幾何と複素数」（素案）

中学校の数学において，三角形や円などの図形に注目し，三角形の合同・相似や円の接線の性質などを利用して，平面上の種々の図形について成立する諸定理を証明する手法を学んだ。そのような内容は，初等幾何と呼ばれる分野に属するものである。

初等幾何の諸定理は，座標やベクトルを用いて計算することにより，中学校で学んだ方法とは異なる方法で示すこともできる。さらに，平面上の図形の回転と拡大に関連するような定理については，複素数の積を利用することも有力な手段である。ただし，そのような方法が，初等幾何の証明よりも簡単であるとは限らない。

1　基本事項

1.1　平行条件

三点 z_1, z_2, z_3 が同一直線上にあるためには，比 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ が実数となることが必要十分である。

1.2　直交条件

角 $\angle z_1 z_2 z_3$ が直角であるためには，比 $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}$ が純虚数となることが必要十分である。

1.3　相似な三角形

二つの三角形 $\triangle z_1 z_2 z_3, \triangle w_1 w_2 w_3$ が相似であるためには，

$$\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}$$

が成立することが必要十分である。

1.4 円周角の定理

円周上の一つの弧に対して，その円周角は中心角の半分である。

2 直線の幾何

2.1 二点を通る直線

二点 z_1, z_2 を通る直線上に点 w があるための条件は

$$(\overline{z_2}-\overline{z_1})w-(z_2-z_1)\overline{w}=\overline{z_2}z_1-\overline{z_1}z_2$$

で与えられる。

2.2 垂直二等分線

線分 z_1z_2 の垂直二等分線上に点 w があるための条件は

$$(\overline{z_2}-\overline{z_1})w+(z_2-z_1)\overline{w}=|z_2|^2-|z_1|^2$$

で与えられる。

2.3 垂線の足

相異なる二点 z_1, z_2 を通る直線に点 z_0 から下した垂線の足を表す複素数は

$$\frac{(z_2-z_1)\overline{z_0}+(\overline{z_2}-\overline{z_1})z_0+\overline{z_2}z_1-z_2\overline{z_1}}{2(\overline{z_2}-\overline{z_1})}$$

で与えられる。

3 シムソンの定理

3.1 非調和比

四点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一の円周または直線上にあるための必要十分条件は，非調和比 $\dfrac{(z_1-z_3)(z_2-z_4)}{(z_1-z_4)(z_2-z_3)}$ が実数となることである。

3.2　シムソンの定理

三角形の外接円上の点から，その三角形の各辺に下した垂線の足は，同一直線上にある。