

平成20年度高校生玉原数学セミナー

「図形の数理」演習テキスト

1. KSEGを用いて、動点に対して対応する点の軌跡を作図する。
2. 紙模型を製作して楕円が円錐曲線であることを確認する。双曲放物面、一葉双曲面が線織面であることを確認する。

1 演習1. 軌跡

KSEGを用いて、動点に対して対応する点の軌跡を作図する。PCは生徒3人に1台、TAに1台準備されている。

1.1 KSEG

KSEGは、定規とコンパスによる作図をPCの画面上でおこなえるソフトウェアである。<http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html> からウインドウズ版 KSEG 0.401 を無償でダウンロードできる。

1.2 KSEGの使い方

- マウスの右クリックで点を打つ
- マウスの左クリックでこれまで描いたものを選択する
- 2つのものを選択するのは、2つ目はシフト+左クリック
- 2つの点を選択すると、
「線分、直線、最初の点からの半直線、最初の点中心の円」
の作図が、メニューのクリックにより行える。
- 2つの直線、2つの円を選択すると、交点の作図が、
メニューのクリックにより行える。
- 2つのものを選択してできることは、メニューの色が変わるのでわかる。
- 描いたものを元に戻すのは、コントロール z 。
- 選択したもののキャンセルは、同じところを、シフト+左クリック。
- 関係ないところで左クリックすると、選択全体がキャンセルされる。

以上の操作だけで、定規とコンパスによる作図が行われる。

1.3 K S E Gを使う

課題1. 点を打つ。2点を通る直線を引く。2点について、1点を中心とし他方を通る円周を描く。

課題2. これらだけで次の操作ができることを実際にK S E Gで確かめよ。

- 線分と1点に対して、点を中心とする線分の長さを半径とする円を描く（長さを移す操作）。
- 直線と点に対して、垂線、平行線を描く。
- 線分に対して、中点をとる。
- 3点に対して、第2の点の角の2等分線を描く。
- 3点に対して、それらを通る円を描く。

この5つについては、メニューの中にショートカットがある。

1.4 K S E Gで軌跡を描く方法

今回は、軌跡を描きたいと考えているので、メニューにある軌跡を描くというボタンを使うのであるが、次の操作が重要である。

- 直線上、円上で、点を打つと、直線上、円上の点をとることができる。
- 操作ではないが、後にとった点は、前にとった点を選択し変化させればそれに連れて動く。2つの点を選択し、軌跡を描くというボタンをクリックすると、先にとった点が、円または直線上を動くときの、後にとった点の軌跡を描くことができる。

作図が複雑になると、点や円に名前をつけたくなるかもしれない。K S E Gで、それも可能である。また、作図には必要でも、結果の図には不要と思われるものを見えないようにすることも可能である。

1.5 軌跡を描く

課題3. 放物線を軌跡として作図せよ。

- 直線と1点を与えて、直線からの距離と1点からの距離が等しい点 P の全体と考えて、動点を、 P から直線への垂線の足にとる。

- あるいは、直角の一方の辺に長さ1の線分を決めておきもう一方の辺上に動点をとる。直角を挟む2辺が $x, 1$ の直角三角形と相似な直角を挟む2辺が x^2, x の直角三角形をつくる。これにより、 $y = x^2$ のグラフが軌跡として求まる。

課題4. 楕円（双曲線）を軌跡として作図せよ。

- 焦点となる2点を与えて、その2点への距離の和（差）が一定の点の軌跡として作図する。
- 焦点となる1点を中心とする距離の和を半径とする円上の点を動点とするか、距離の和の長さの線分上に動点を定める。

課題5. カージオイドを軌跡として作図せよ。

- AB を直径とする円上の動点 C に対し、 C における接線への A からの垂線の足を P とする。 P の軌跡を求める。
- AB の中点 E について、 AE を直径とする円と、 EB を直径とする円を考える。 EB を直径とする円が、 AE を直径とする円の回りを滑らずに接したまま回転する時、点 B の軌跡を求める。
- $2FA = AB$ となる点 F を AB の A の延長上に取り、 B からでる光線が FB を直径とする円で反射するとして得られる線分をとると、上を取ったカージオイドに接する。

1.6 包絡線を描く

先にとった点と後に描いた直線、線分、円などを選択して、軌跡を描かせてみよう。

課題6. 点 A と直線を取り、直線上の動点 B と点 A との垂直2等分線の全体を描いてみよ。あるいは、動点 B において、線分 AB に直交する直線の全体を描いてみよ。

課題7. 点 A と円を取り、円上の動点 B と点 A との垂直2等分線の全体を描いてみよ。あるいは、動点 B において、 AB に直交する直線の全体を描いてみよ。その図で、 A を動かして図形の変化を観察せよ。

課題8. AB を直径とする円を取り、円上の動点 C に対し、 CB を直径とする円の全体を描いてみよ。

2 演習 2. 円錐曲線、線織面

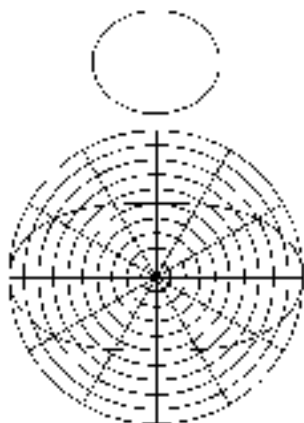
紙模型を製作して楕円が円錐曲線であることを確認する。双曲放物面、一葉双曲面が線織面であることを確認する。

準備するもの： はさみ（紙を切る）、定規、セロハンテープ、ボールペン、糊、糸

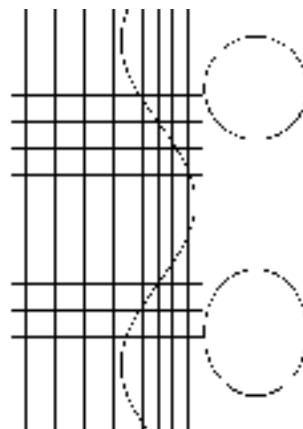
2.1 円錐曲線

課題 1.

- 配られた同心円の描いてある図形 1、図形 2 を曲線に沿って切り出す。
- 同心円の図形の半径をどれかひとつり鋏で切る。
- 2重になるように丸め、糊かテープで固定する。
- 楕円を切り出す。
- 正弦曲線の描いてある図形を正弦曲線に沿って切り出す。
- 円柱になるように丸め、糊かテープで固定する。
- 切り口の曲線が一致することを確認する。



図形 1



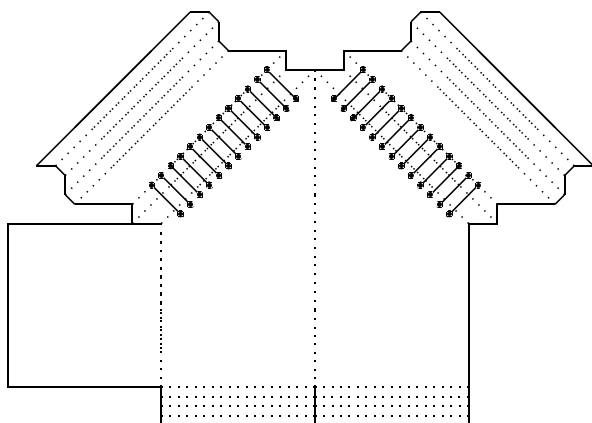
図形 2

2.2 双曲放物面

課題 2.

- 図形 3 を 2 枚、鋏で切りだす。中に鋏を入れるところは注意する。
- 線をボールペンでなぞり、折りやすくする。

- 切り出した2枚の図形を図4のように貼り合わせる。
- 組み立てた後、一番低い切れ込みから、糸を互い違いに図4のようにわたす。



図形 3

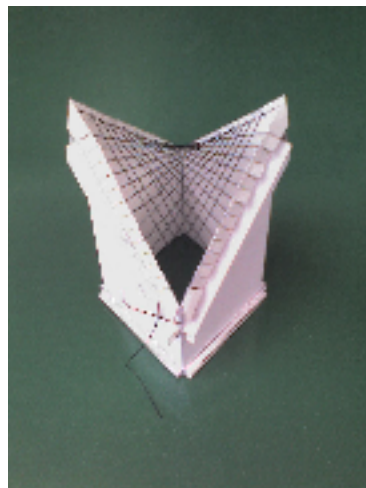
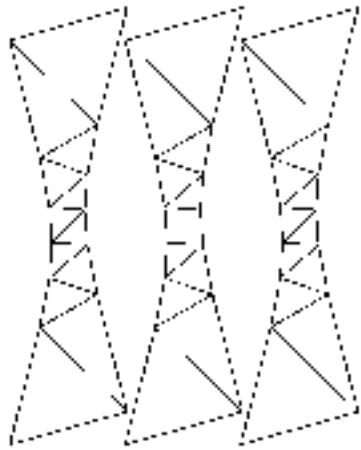


図 4

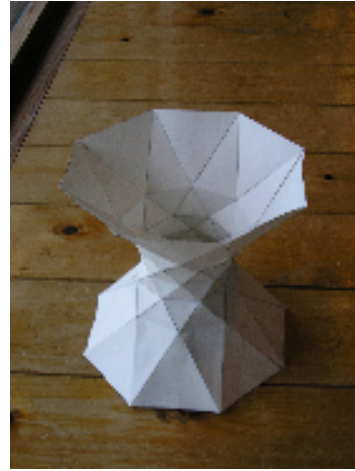
2.3 一葉双曲面

課題 3.

- 2人一組で行う。
- 紙（裏3枚と表3枚）に描いてある図形5を切り出す。切り出された図形は、表裏9枚ずつになるが、8枚を使い1枚は予備である。
- 紙の束の上において、ボールペンでなぞり、折りやすくする。
- 8枚の紙に山折り谷折り交互になるように軽く折り目をつける。表が外向きになるようにする。
- もう8枚の紙に山折り谷折りが、前と逆になるように軽く折り目をつける。
- 端の3つの三角形を順に貼り合わせる。
- 図6のように、16枚の図形を編むように貼り付けて立体を作る。
- 元の図形の辺が直線となっていることを確認する。



図形 5



2.4 型紙の作り方

課題 4. 課題 1、課題 2、課題 3 の型紙をどうやって作ったか考える。このセミナーが終わった後で、自分で同じような型紙を作って模型を作製すると面白い。